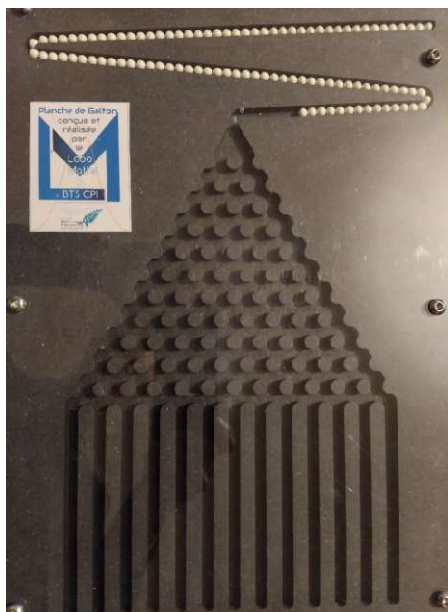


Matériel utilisé :
Planche de Galton



Niveau :
Terminale spécialité mathématiques

Place dans la progression :
Après avoir vu la loi binomiale mais plusieurs semaines après la fin du chapitre.

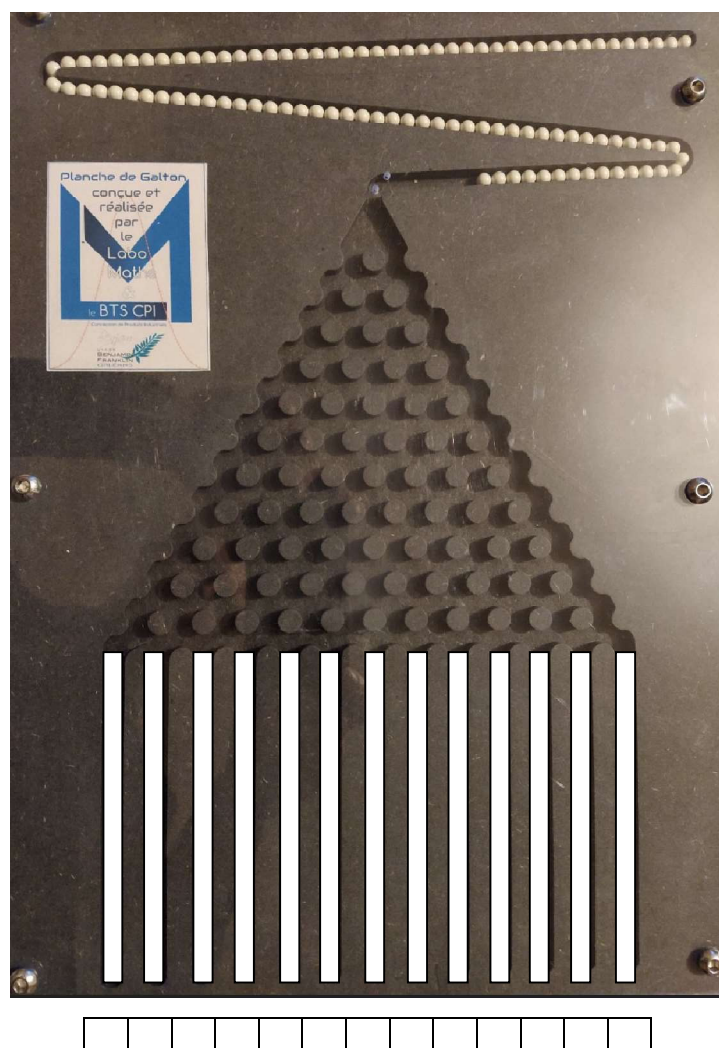
Durée : 30 minutes

Enoncé :
Le professeur montre la planche de Galton, sans l'utiliser, et explique qu'elle a été fabriquée à l'aide d'une fraiseuse programmée pour que les plots soient disposés et espacés de façon régulière. La planche de Galton contient 100 billes.

Le professeur propose le jeu suivant : il va redresser la planche et faire descendre les 100 billes mais au préalable chaque élève doit faire un pronostic sur le nombre de billes que contiendra chacun des réservoirs situés en bas de la planche en expliquant la raison de son choix. L'élève qui aura fait le pronostic le plus proche du tirage obtenu sera déclaré gagnant.

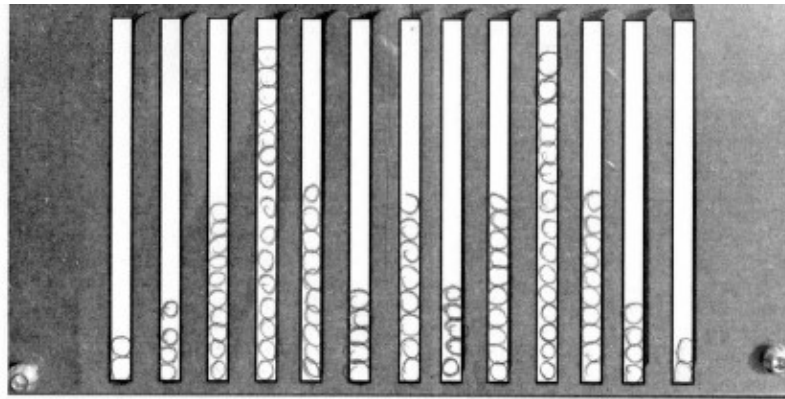
Le professeur distribue à chaque élève une feuille de pronostic à compléter en demandant de dessiner les billes obtenues dans chaque réservoir à la fin de l'expérience et d'indiquer le nombre de billes dans chaque réservoir. Il est également demandé à la classe de proposer une méthode pour déterminer le gagnant.

Feuille réponse distribuée aux élèves :



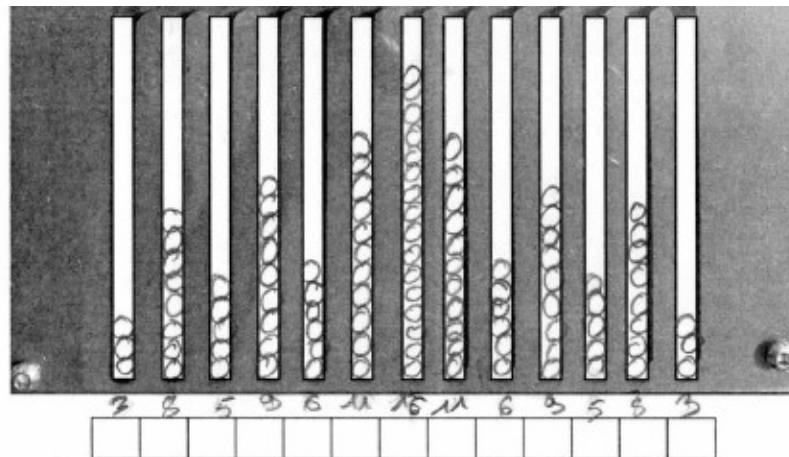
Exemples de réponses proposées par des élèves (cet exercice a été testé avec une classe de Terminale spécialité mathématiques) :

Les élèves avaient le droit d'examiner la planche mais pas de la manipuler, certains ont mesuré la hauteur des réservoirs et le diamètre des billes afin de savoir combien de billes pouvaient contenir dans un réservoir.



2	4	10	15	10	5	8	5	10	15	10	4	2
---	---	----	----	----	---	---	---	----	----	----	---	---

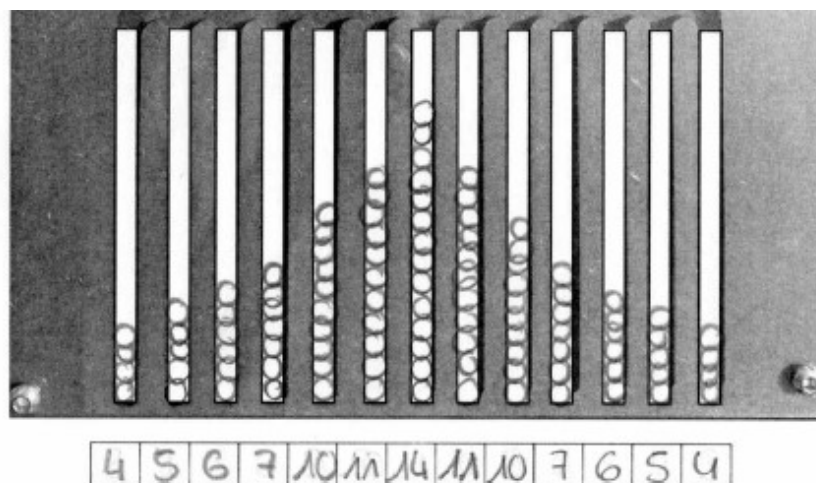
Explication du choix du pronostic : En séparant la pyramide en 2, puis encore en 2 sur chaque moitié, j'ai mis un grand nombre de billes (15). Ensuite, par symétrie à cette colonne, j'ai réduit le nombre de billes. Sur les extrémités, j'ai mis un petit nombre. Ainsi, si on se réfère à la 7^{ème} colonne en partant de la gauche, il y a une symétrie par rapport à cette colonne.



3	3	5	5	6	11	16	11	6	5	5	3	3
---	---	---	---	---	----	----	----	---	---	---	---	---

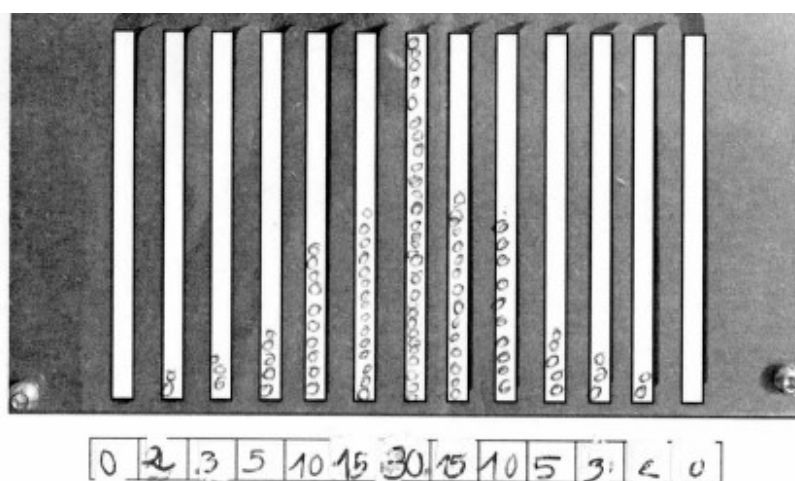
Explication du choix du pronostic :

Tout compliqué de tomber sur les billes du fond, donc ça va tomber sur la colonne à côté. Celle du milieu est celle qui en aura le plus car il y a plus de chemin qui peuvent ^{passer}, donc ça peut aussi tomber sur celles d'à côté ou celles de 3 colonnes à côté.



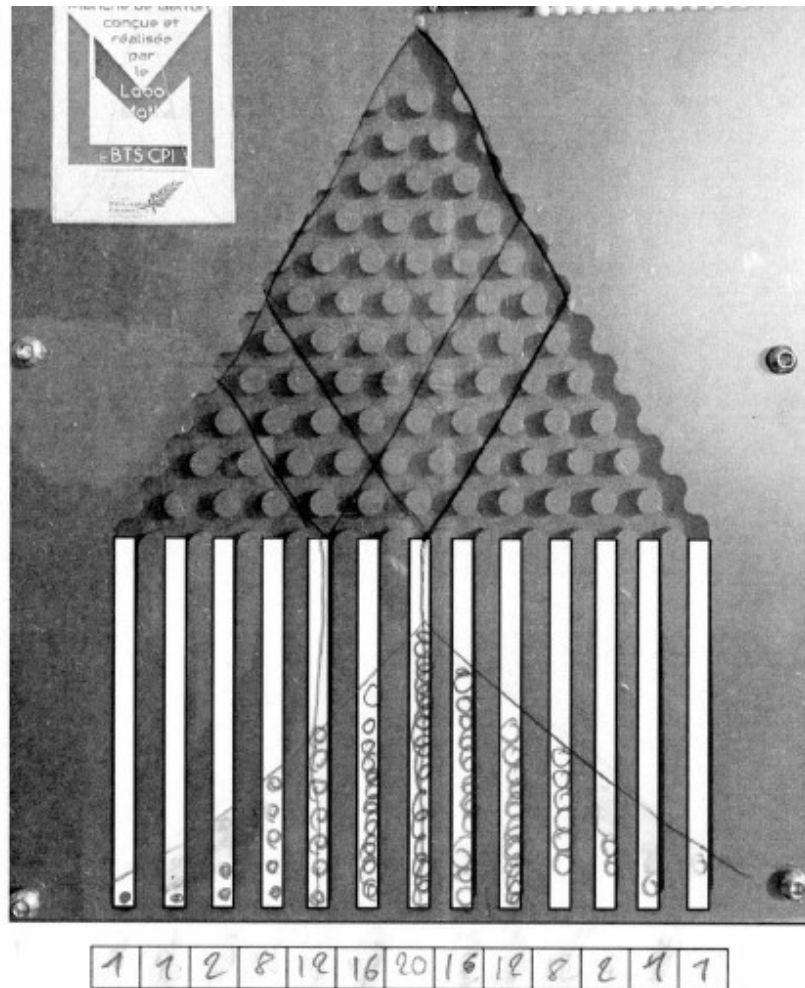
Explication du choix du pronostic :

Les chemins aux extrémités ont des chemins plus long à parcourir donc la probabilité pour que les billes tombent aux extrémités est plus faible. Donc il y aura plus de billes sur les colonnes du centre



Explication du choix du pronostic :

Si les probabilités qu'une bille tombe dans un tube était la même pour tous les tubes, elle serait $100 \div 13 \approx 7,5$.
On peut déterminer intuitivement que la bille a au moins 4 fois plus de chances de tomber dans celui du milieu ($4 \times 7,5 = 30$) et 2 fois plus de tomber dans celui à la droite ou à la gauche de ce dernier ($2 \times 7,5 = 15$).

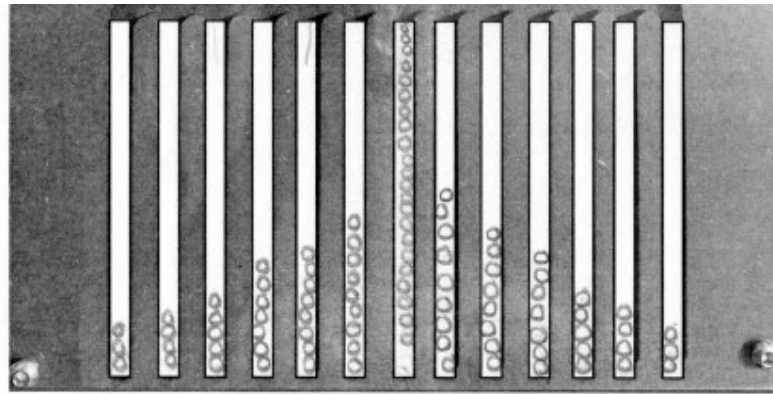


Explication du choix du pronostic :

(si les billes ne s'entrechoquent pas trop)

Il semble qu'il y ai plus de chemins differents menant au milieu.

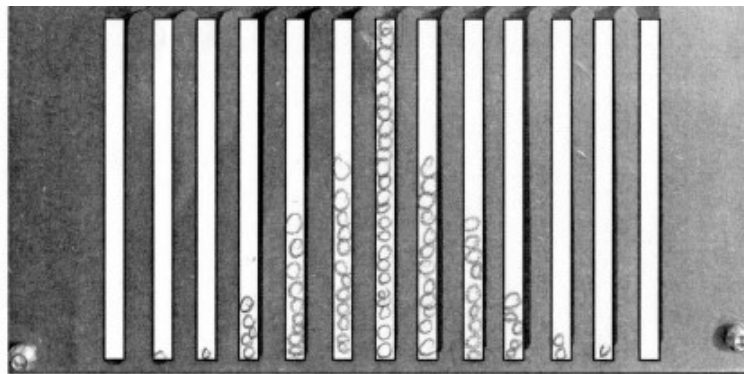
Les chiffres sont choisis aléatoirement, juste pour souligner le resultat triangulaire.



3	4	5	7	8	9	22	9	8	7	5	3
---	---	---	---	---	---	----	---	---	---	---	---

Explication du choix du pronostic :

1 seule bille peut passer à travers une gante.
 Donc lorsque la première tombe, vu l'orientation on suppose qu'elle tombe à gauche, la deuxième ne pourra pas passer par la gante de gauche, donc elle passera à droite. $\leftrightarrow$ ou $\rightarrow$
 Les billes tomberont plus au milieu en faisant $\leftrightarrow$ ou $\rightarrow$
 Donc après elle se répartiront des goulottes les plus proches au plus éloignées, de façon décroissante.
 Il ne peut y avoir que 22 billes au centre car $1 \text{ bille} = 9,2 \text{ cm}$
 et $1 \text{ colonne} = 4,4 \text{ cm}$ $\frac{4,4}{2} = 2,2$, on met autant de billes au centre que la colonne peut en contenir.

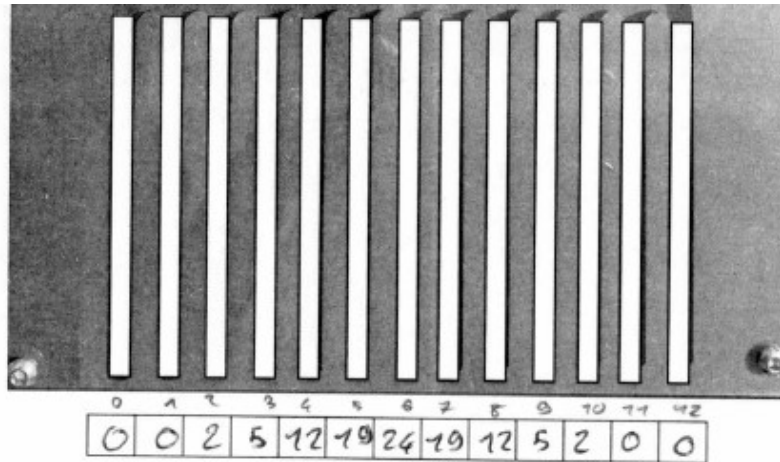


0	1	1	5	10	15	35	15	10	5	2	1	0
---	---	---	---	----	----	----	----	----	---	---	---	---

Explication du choix du pronostic :

Il y a plus de chance de tomber sur les tubes du milieu que dans ceux aux extrémités. J'ai commencé par mettre 30 au milieu mais en divisant par 2 pour chaque tube je n'arrivais pas au total de 100 billes, j'ai donc égalisé en rajoutant des billes partout tout en suivant la même logique.

A hand-drawn fractal tree on graph paper, consisting of 13 levels of branching. Each branch is labeled with a fraction representing its length. The tree starts with a single branch of length 1 at the top and splits into two branches at each subsequent level. The fractions are powers of 1/2, 1/3, and 1/4, indicating different scaling factors for different branches. The tree is drawn on a grid, with the root at the top center and the branches extending downwards and outwards.



Explication du choix du pronostic :

A chaque cylindre rencontré, une bille a "le choix" d'aller à gauche ou à droite, avec 1 chance sur 2. Il y a un total de 12 rangées de cylindre. Donc une bille réalise 12 fois de façon identique et indépendante la même expérience de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

Soit X la variable aléatoire qui, à une colonne, associe la probabilité qu'une bille tombe dedans.

X suit la loi binomiale de paramètres $p = \frac{1}{2}$ et $n = 12$.

La probabilité qu'une bille tombe dans une colonne d'indice m (avec $m \in \llbracket 0; 12 \rrbracket$), est :

$$P(X=m) = \binom{12}{m} \times p^m \times (1-p)^{12-m} \Rightarrow$$

$X \backslash$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X)$	$\frac{1}{4096}$	$\frac{12}{4096}$	$\frac{66}{4096}$	$\frac{220}{4096}$	$\frac{495}{4096}$	$\frac{792}{4096}$	$\frac{924}{4096}$	$\frac{792}{4096}$	$\frac{495}{4096}$	$\frac{220}{4096}$	$\frac{66}{4096}$	$\frac{12}{4096}$	$\frac{1}{4096}$

Comme on a 100 billes, on multiplie chaque probabilité par 100, et on devrait obtenir le nombre de billes par colonne.

n° colonne	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
nb billes	0	0	2	5	12	19	24	19	12	5	2	0	0

↳ Stratégie pour le joueur

Organisateur: Il compare le nombre de bille d'écart en trop entre le résultat et le pronostic du joueur. Celui qui a le moins de billes fausses gagne.

Pour désigner le vainqueur, les élèves ont décidé de calculer pour chaque compartiment la valeur absolue de l'écart entre le nombre de billes du pronostic et celui du tirage puis de faire la somme de ces écarts, l'élève avec la somme la plus petite est déclaré vainqueur.

Le professeur ramasse les feuilles réponses et fait le tirage. Les élèves manipulent ensuite la planche et constatent que la répartition des billes est toujours sensiblement la même d'un tirage à l'autre.

Le professeur donne le nom du gagnant à la séance suivante après avoir fait une feuille de calcul sur tableur.

Il se trouve que lors de cette séance observée en classe, c'est l'élève ayant utilisé la loi binomiale qui a gagné (dernière feuille réponse présentée ci-dessus).

Enoncé alternatif pouvant servir de sujet pour le Grand Oral du Baccalauréat :

Un forain veut utiliser la planche pour proposer un jeu sur le principe de la roulette au casino.

Dans ce jeu on lance une seule bille.

Un joueur paye une mise et parie sur le réservoir dans lequel va tomber la bille.

Question : *proposer un montant de mise ainsi que le montant des récompenses associées à chaque réservoir pour que le jeu soit favorable à l'organisateur tout en étant attractif pour les joueurs.*